ΑΣΚΗΣΗ 1η

Εστω η συναρτηση

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}, \quad x \neq y$$

Για ποια $x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)=(x_0,x_0)} f(x,y)$; (με $x_0 = y_0$)

Είναι συνεχής;

ΛΥΣΗ

Η $f: D \to \mathbb{R}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$

Λόγω της άλγεβρας συναρτήσεων η f συνεχής, αφού οι προβολές $(x,y) \longmapsto x$ και $(x,y) \longmapsto y$ είναι συνεχείς συναρτήσεις (η ως ρητή)

Εστω τωρα (x_0,x_0) $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ και $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)$

$\iff (x_\nu \to x_0$ και $y_\nu \to y_0)$

• Αν $x_0 \neq 0$ τοτε $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,x_0)} f(x,y)$ δεν υπαρχει

αφου

$$f\left(x_0+\frac{1}{\nu}, x_0\right) = \left(2x_0 + \frac{1}{\nu}\right)\cdot\frac{1}{\nu} = 2x_0\nu + 1 \to \pm\infty$$

για $x_0 \lessgtr 0$ αντιστοιχα

Ενώ για να υπαρχει το οριο θα πρεπε $\forall (x_\nu, y_\nu) \to (x_0, x_0)$ να υπαρχει $\lim f(x_\nu, y_\nu) \in \mathbb{R}$

• Αν $x_0 = 0$ τοτε $f\left(\frac{1}{\nu}, 0\right) = 1 \to 1$

ενω $\left(\frac{1}{\nu}, 0\right) \to (0,0)$

αλλά $f\left(0, \frac{1}{\nu}\right) \to -1$

ενω $\left(0, \frac{1}{\nu}\right) \to (0,0)$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Άσκηση 2η

Έστω η $g(x,y) = \dfrac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

Είναι η g συνεχής; Μπορείτε ν.β. ένα $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η g να μπορεί να επεκταθεί συνεχώς στο $\mathbb{R}^2$;

ΛΥΣΗ

Η $g: D \to \mathbb{R}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$

είναι συνεχής ως ρητή. Θα την επεκτείνουμε δηλ.

$$\tilde{g}(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & , (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Θέλω ν.β. ένα $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η $\tilde{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής. Δηλ. θα βρω ένα α ώστε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \alpha = (\tilde{g}(0,0))$$

Εξετάζουμε, εάν $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$

- $g(\frac{1}{\nu}, 0) \to 0$ (*)
- $g(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}) \to 0$ (**)
- $g(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu^2}) \to \frac{1}{2}$ (***)

Άρα, τα ζεύγη (*)(***) και (**)(***) ικανοποιούν την μη ύπαρξη ορίου.

άρα $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}$ διότι $\forall (x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$ θα πρέπει $g(x_\nu, y_\nu) \to \alpha \in \mathbb{R}$

Άσκηση 3η

Η ταυτοτική στον $\mathbb{R}^n$ είναι συνεχής;

ΛΥΣΗ

Δηλαδή η $\bar{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$

ΘΔΟ η $\bar{f}$ συνεχής σε κάθε $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

α' τρόπος) Θέλω $\forall \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 : \bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{f}(\bar{x}_0)$
$(``\bar{x}_\nu" \to ``\bar{x}_0")$

β' τρόπος) $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ άρα $\bar{f}$ συνεχής $\{|x_i - y_i| \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|\}$

εάν $\bar{x} \longmapsto x_i$ συνεχής $i=1,\dots,n$

Ασκηση 4η

Εστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτο $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ με $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{0}$
και $\bar{g}: U \to \mathbb{R}^m$ φραγμενη.

ΝΔΟ

(i) $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} (f_j \bar{g})(\bar{x}) = \bar{0}$ $\forall j = 1, \dots m$ οπου
$\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))$

(ii) $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} (\bar{f} \cdot \bar{g})(\bar{x}) = 0$

ΛΥΣΗ

(i) $\bar{g}$ φραγμένη $\Leftrightarrow (\exists\, c > 0) : \|\bar{g}(\bar{x})\| \leq c,\ \forall \bar{x} \in U$

(Θελω)

$\forall\, \bar{x}_\nu \to \bar{0} \in \mathbb{R}^n : \underbrace{f_j(\bar{x}_\nu) \cdot \bar{g}(\bar{x}_\nu)}\to \bar{0} \in \mathbb{R}^m$

$\|f_j(\bar{x}_\nu) \cdot \bar{g}(\bar{x}_\nu) - \bar{0}\| \to 0$

$\Leftrightarrow |f_j(\bar{x}_\nu)| \cdot \|\bar{g}(\bar{x}_\nu)\| \to 0$

μηδενική × φραγμενη

επειδή, $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \bar{f}(\bar{x}) = \underset{\in \mathbb{R}^m}{\bar{0}} \Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f_j(\bar{x}) = \underset{\in \mathbb{R}}{0}$

$\forall\, i = 1, 2, \dots, m$ και $\bar{f} = (f_1, \dots, f_m)$

(ii) ΘΔΟ $\forall (x_\nu) \in U \to \bar{0} \Rightarrow \underbrace{f(\bar{x}_\nu) \cdot \bar{g}(\bar{x}_\nu)} \to 0$

$\Leftrightarrow |\bar{f}(\bar{x}_\nu) \cdot \bar{g}(\bar{x}_\nu)| \to 0$

$\in \mathbb{R}$

Αλλα απο Cauchy-swartz

$|\bar{f}(\bar{x}_\nu) \cdot \bar{g}(\bar{x}_\nu)| \leq \|\bar{f}(\bar{x}_\nu)\| \cdot \|\bar{g}(\bar{x}_\nu)\| \to 0$